PART2 対数関数の導関数

要点整理と公式

要点 ① 対数関数の導関数

対数関数 $y=\log_a x$ の導関数を求める。

$$(\log_a x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\frac{x+h}{x}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\log_a\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

ここで，$\dfrac{h}{x}=t$ とおくと，$h=xt$ であり，$h\to 0$ のとき $t\to 0$

$$(\log_a x)'=\lim_{t\to 0}\frac{1}{xt}\log_a(1+t)=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\log_a(1+t)=\frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

0 に近い t の値について，$(1+t)^{\frac{1}{t}}$ の値を調べると，右の表のようになり，一定の値に近づくことが予想される。

t	$(1+t)^{\frac{1}{t}}$
0.1	$1.1^{10}=2.59374\cdots\cdots$
0.01	$1.01^{100}=2.70481\cdots\cdots$
0.001	$1.001^{1000}=2.71692\cdots\cdots$
0.0001	$1.0001^{10000}=2.71814\cdots\cdots$
0.00001	$1.00001^{100000}=2.71826\cdots\cdots$

実際に，$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ は極限値をもつことが知られていて，その極限値を「　」で表す。

$$e=\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$$

e は無理数で，その値は $e=2.718281828\cdots\cdots$ であることが知られている。

この e を用いると　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x}\log_a$　　が成り立つ。

とくに，$a=e$ のときは，以下が成り立つ。

$$(\log_e x)'=\frac{1}{x}\log_e e=\frac{1}{x}$$

e を底とする対数 $\log_e x$ を，x の「　　　　　」という。自然対数 $\log_e x$ は，底 e を省略して，「　　　」と書くことが多い。このとき，底の変換公式を用いて

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\log_e a}=\frac{1}{x\qquad}$$

と表される。とくに，$a=e$ のときは，以下が成り立つ。

$$(\log_e x)' = (\qquad)' = \frac{1}{\qquad\quad} = \frac{1}{x}$$

以降，$\log x$ は自然対数を表すものとする。

対数関数の導関数

$(\log x)' = \dfrac{1}{x}$　　　$(\log_a x) = \dfrac{1}{x\log a}$

(ex) $y = \log 3x$ の導関数は

$$y' = \frac{1}{\quad}\cdot(3x)' = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$$

$y = \log_2(2x-1)$ の導関数は

$$y' = \frac{1}{\qquad\qquad}\cdot(2x-1)' = \frac{2}{(2x-1)\log 2}$$

要点② $y = \log|x|$ の導関数

関数 $y = \log|x|$ の導関数について

$x > 0$ のとき $y = \log|x| = \log x$ より $y' = \dfrac{1}{x}$

$x < 0$ のとき $y = \log|x| = \log(-x)$ より $y' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-x)' = \dfrac{-1}{-x} = \dfrac{1}{x}$

以上より $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ が成り立つ。同様に $(\log_a|x|)' = \dfrac{1}{x\log a}$ が成り立つ。

一般に，次のことが成り立つ。

$$\{\log|f(x)|\}' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

(ex) $y = \log|3x+2|$ の導関数は

$$y' = \underline{\qquad\qquad} = \frac{3}{3x+2}$$

2 次の関数を微分せよ。

(1) $y=\log(x^2-1)$　　(2) $y=\log_3|2x|$

(3) $y=\log|\cos x|$　　(4) $y=x\log x$

Point Pickup

対数関数の導関数

$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$　　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$　　$(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$

一般に $\{\log|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ が成り立つ。

第 9 講　PART2 確認問題

次の関数を微分せよ。

答えは下の①～④のうちから選べ。

1　$y=\log(x^2+1)$

$y'=$ ア

① $\dfrac{1}{x^2+1}$　② $-\dfrac{1}{x^2+1}$

③ $\dfrac{2x}{x^2+1}$　④ $\dfrac{x^2}{x^2+1}$

2　$y=\log_5|3x|$

$y'=$ イ

① $\dfrac{1}{x}$　② $\dfrac{1}{3x}$

③ $\dfrac{1}{x\log 3}$　④ $\dfrac{1}{x\log 5}$

3　$y=\log|\sin x|$

$y'=$ ウ

① $\dfrac{1}{\sin x}$　② $\dfrac{1}{\cos x}$

③ $\dfrac{\cos x}{\sin x}$　④ $-\dfrac{\cos x}{\sin x}$

4　$y=x^2\log x$

$y'=$ エ

① $2x\log x$　② $2x\log x+x$

③ $2x\log x+x^2$　④ $\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)\log x$

PART2　対数関数の導関数

2　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=\log(x^2-1)$　(2)　$y=\log_3|2x|$

(3)　$y=\log|\cos x|$　(4)　$y=x\log x$

[解答]

(1)　$y'=\dfrac{(x^2-1)'}{x^2-1}=\dfrac{2x}{x^2-1}$

(2)　$y'=\dfrac{(2x)'}{2x\log 3}=\dfrac{2}{2x\log 3}=\dfrac{1}{x\log 3}$

(3)　$y'=\dfrac{(\cos x)'}{\cos x}=\dfrac{-\sin x}{\cos x}=-\tan x$

(4)　$y'=(x)'\log x+x(\log x)'=1\cdot\log x+x\cdot\dfrac{1}{x}=\log x+1$

第 9 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：③

[解説]

$$y'=\frac{(x^2+1)'}{x^2+1} \quad \text{[A]}$$

$$=\frac{\mathbf{2x}}{\mathbf{x^2+1}}$$

[A]　$(\log x)'=\dfrac{1}{x}$

$\{\log f(x)\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

2

[正解] イ：④

[解説]

$$y'=\frac{(3x)'}{3x\log 5} \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{3}{3x\log 5}$$

$$=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x\log 5}}$$

[B]　$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\log a}$

$(\log_a |x|)'=\dfrac{1}{x\log a}$

3

[正解] ウ：③

[解説]

$$y'=\frac{(\sin x)'}{\sin x} \quad \text{[C]}$$

$$=\frac{\mathbf{\cos x}}{\mathbf{\sin x}}$$

[C]　$(\log|x|)'=\dfrac{1}{x}$

$\{\log|f(x)|\}'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

4

[正解] エ：②

[解説]

$$y'=(x^2)'\log x+x^2\cdot(\log x)' \quad \text{[D]}$$

$$=2x\log x+x^2\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\mathbf{2x\log x+x}$$

[D]

$\{f(x)g(x)\}'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$